ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 28 SEPTEMBRE 1908.

PRÉSIDENCE DE M. BOUCHARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur deux applications de l'équation de Fredholm à des problèmes de Physique mathématique.* Note de M. **Émile Picard**.

On sait combien d'exemples ont été donnés de questions de Physique mathématique résolues à l'aide de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Quand on a pu ramener le problème à une telle équation, il reste en général à examiner si l'on se trouve ou non dans un cas singulier; il peut arriver cependant que des circonstances plus complexes se présentent, soit parce que le problème comporte, outre les fonctions, certaines constantes inconnues, soit parce qu'une discussion est nécessaire pour étudier la nature des fonctions en quelque point singulier. Je me propose d'indiquer ici deux exemples très simples de ces circonstances; j'en ai indiqué les points essentiels dans mon Cours de l'année dernière.

1. Divers auteurs ont déjà étudié une loi d'attraction correspondant à un potentiel plus général que le potentiel newtonien, je veux parler du potentiel de la forme

$$\frac{e^{-kr}}{r} \qquad (k > 0), \tag{1}$$

et l'on peut notamment consulter à ce sujet le Livre de C. Neumann (¹). Si donc on suppose que la loi des attractions électriques corresponde à la

(¹) C. Neumann, *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen* (Leipzig), 1896.

fonction de la distance

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{r^2},$$

on peut reprendre tous les problèmes relatifs à la distribution de l'électricité; c'est ce qu'a fait Neumann dans le cas des conducteurs sphériques.

Il est facile de voir que le problème général de la distribution électrique correspondant au potentiel (1) se ramène à une équation de Fredholm. Pour abréger, prenons simplement un conducteur C isolé et possédant une certaine charge. Il y a ici à trouver une couche *superficielle* sur la surface du conducteur et la distribution *à l'intérieur* de ce conducteur. Nos inconnues sont donc une densité superficielle ρ_1 et une densité de volume ρ_2 pour l'intérieur de C. Le potentiel total V est donc exprimé par la formule

$$V = V_1 + V_2,$$

en posant

$$V_1 = \int\int \rho_1 \frac{e^{-kr}}{r} d\sigma, \qquad V_2 = \int\int\int \rho_2 \frac{e^{-kr}}{r} dv,$$

la première intégrale étant étendue à la surface S du conducteur, et la seconde au volume de celui-ci.

Or on démontre de suite que l'on a dans le conducteur

$$(2) \qquad \Delta V = k^2 V - 4\pi\rho_2,$$

formule qui généralise la formule de Poisson.

Comme, à l'intérieur de C, le potentiel est nécessairement constant, il résulte de cette formule que ρ_2 *est une constante.*

Rappelons-nous maintenant que, si l'on pose

$$V_1 = \int\int \frac{\rho_1 e^{-kr}}{r} d\sigma,$$

on a pour la dérivée normale intérieure $\frac{dV_1}{dn}$ de ce potentiel de simple couche en un point s de la surface

$$\frac{dV_1}{dn} = \int\int f(r) \cos\psi . \rho_1^\sigma \, d\sigma - 2\pi\rho_1^s \qquad \left[f(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\right],$$

où ψ désigne l'angle que fait avec la normale intérieure en s la droite joignant le point s à l'élément $d\sigma$.

Le problème est alors facile à mettre en équation. On a sur la surface S

$$\frac{dV_1}{dn}+\frac{dV_2}{dn}=0,$$

puisque V est constant dans le conducteur. Nous pouvons donc écrire

$$(3)\qquad \int\!\!\int f(r)\cos\psi.\rho_1^\sigma\,d\sigma-2\pi\rho_1^s+\frac{dV_2}{dn}=0.$$

Or

$$V_2=\rho_2\int\!\!\int\!\!\int\frac{e^{-kr}}{r}\,dv.$$

Il est donc possible de calculer $\frac{dV_2}{dn}$ qui est égal au produit de ρ_2 par une fonction connue du point s sur la surface. On voit que l'équation (3) constitue une équation de Fredholm pour la densité superficielle ρ_1, qui se trouve exprimée alors à l'aide de la constante ρ_2. On est assuré de ne pas être dans un cas singulier, car il est aisé d'établir que, pour l'équation fonctionnelle en ρ

$$(4)\qquad \rho_s-\frac{\lambda}{2\pi}\int\!\!\int f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\,d\sigma=U_s\quad\text{(fonction donnée)},$$

les valeurs singulières du paramètre λ ont toutes un module *supérieur* à l'unité ($k\neq 0$), ce qui, par parenthèse, montre que les problèmes relatifs au potentiel (1) sont plus faciles pour k différent de zéro et positif que pour $k=0$ [1].

---

[1] Ainsi l'intégrale de l'équation

$$\Delta V=k^2V,$$

continue dans S et pour laquelle $\frac{dV}{dn}$ prend des valeurs données sur S, s'exprime par un potentiel de simple couche

$$V=\int\!\!\int\rho\frac{e^{-kr}}{r}\,d\sigma,$$

la densité ρ satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(\alpha)\qquad \rho_s-\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\,d\sigma=U_s.$$

Il résulte de ce qui a été dit sur l'équation (4) que la solution de cette équation peut être développée suivant les puissances de λ et que la convergence a encore lieu pour $\lambda=1$, d'où la solution de (α) sous une forme extrêmement simple.

Nous avons trouvé, au moyen de l'équation (3),

$$\rho_1^s = A_s \rho_2,$$

A_s étant une fonction connue du point s de la surface S. On déterminera la constante ρ_2 par l'équation du premier degré

$$\rho_2\left(\int\int A_\sigma \, d\sigma + W\right) = Q,$$

W étant le volume du conducteur et Q la charge donnée. Le problème est ainsi complètement résolu.

Il faut cependant montrer que le coefficient de ρ_2 dans la dernière équation ne peut être nul. On aurait, dans le cas contraire, en prenant pour ρ_2 une constante arbitraire, un équilibre pour lequel la charge serait toujours nulle, et il est aisé de voir qu'on est conduit à une contradiction. En effet, le potentiel total V satisfaisant à l'équation (2) à l'intérieur du conducteur et $\frac{dV}{dn}$ étant nul à la surface, il en résulte que V a la valeur constante $\frac{4\pi\rho_2}{k^2}$ à l'intérieur et sur la surface. *A l'extérieur* V satisfait à l'équation

$$\Delta V = k^2 V.$$

Supposons pour fixer les idées ρ_2 et par suite V positifs sur la surface S; il résulte de propriétés élémentaires de l'équation précédente que la dérivée normale limite *extérieure* (rapportée à la direction de la normale *intérieure*), $\frac{dV'}{dn}$, est positive. Or on a

$$\frac{dV'_1}{dn} - \frac{dV_1}{dn} = 4\pi\rho_1^s;$$

comme

$$\frac{dV'_2}{dn} - \frac{dV_2}{dn} = 0,$$

on arrive à la conclusion $\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = 4\pi\rho_1^s$, et, puisque $\frac{dV}{dn} = 0$, il en résulte que la densité superficielle ρ_1 est partout positive (ou nulle). Comme il en est de même de la densité de volume ρ_2, la masse électrique totale ne peut être nulle; ce qui est contradictoire.

2. Prenons, comme second exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

C étant une constante positive, rencontrée par M. Boussinesq dans l'étude du pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un solide, et étudions à son sujet la question suivante qui me fut posée, il y a quelques années, par notre éminent confrère :

*Trouver l'intégrale de cette équation continue à l'*EXTÉRIEUR *d'un contour* Γ, *prenant des valeurs données sur ce contour et s'annulant à l'infini.*

Tout d'abord en posant

$$\theta = e^{\frac{y}{2C}} v,$$

on a pour v l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{4C^2} v.$$

En choisissant convenablement les unités, on peut supposer que $2C = 1$. Il s'agit donc de trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v, \tag{5}$$

prenant des valeurs données sur Γ, et telle que le produit

$$e^y v \tag{6}$$

soit nul à l'infini.

Nous avons besoin de considérer une intégrale particulière de l'équation (5) correspondant à l'équilibre calorifique d'une plaque isotrope indéfinie rayonnant au dehors, avec une seule source et nulle à l'infini. Cette solution u, dépendant seulement de la distance r à la source, peut être représentée par

$$u(r) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

comme je l'ai montré autrefois; elle devient infinie à l'origine comme $\log \frac{1}{r}$, et de plus

$$u\sqrt{r}\, e^r \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{dr}\sqrt{r}\, e^r$$

tendent vers des limites finies pour $r = \infty$.

Ceci rappelé, nous allons exprimer l'intégrale cherchée sous la forme d'une sorte de potentiel de double couche

$$v = -\int_\Gamma \rho \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma, \tag{7}$$

où r désigne la distance de l'élément $d\sigma$ de Γ au point (x, y), et (r, n)

l'angle formé par cette direction r avec la normale intérieure. On a évidemment

$$v' - v_s = -\pi\rho_s,$$

v_s désignant la valeur de v en un point s de Γ, et v' la valeur limite *extérieure* de v en ce point. De là se tire l'équation fonctionnelle donnant ρ; elle peut s'écrire

$$\rho_s + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \rho_\sigma \frac{du}{dr}\cos(r, n)\,d\sigma = \text{fonction donnée.}$$

C'est une équation de Fredholm; on n'est pas dans un cas singulier [1], et pour sa résolution effective on pourrait utiliser une remarque analogue à celle que nous avons faite dans la note du n° 1. La fonction $v(x,y)$ que nous venons de trouver est pour le point (x,y) s'éloignant indéfiniment de l'ordre de

$$\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}},$$

en désignant par R la distance du point (x,y) à un point fixe du plan, l'origine par exemple; cela résulte de la propriété rappelée plus haut de la fonction $u(r)$.

Il est maintenant évident que l'expression (6) s'annule à l'infini, de quelque manière que (x,y) s'éloigne indéfiniment. Nous avons donc trouvé une solution θ de l'équation initiale, prenant les valeurs données sur Γ, et s'annulant à l'infini. La façon dont θ s'annule varie avec la direction suivie par (x, y) en s'éloignant indéfiniment. Nous nous en rendons compte très aisément sur cet exemple simple; dans d'autres problèmes de même nature, où figurent des singularités essentielles, on pourra rencontrer, à cet égard, de sérieuses difficultés.

---

[1] Pour l'établir, il suffit de remarquer que, dans le cas contraire, on pourrait trouver un potentiel (7) de double couche, à densité ρ non nulle, pour lequel la valeur limite extérieure v' sur la courbe Γ serait nulle. Il est clair qu'alors v serait partout nul à l'extérieur. Donc, à cause de la continuité des dérivées normales pour le passage par la courbe, on aurait sur la courbe Γ pour l'intérieur

$$\frac{dv}{dn} = 0.$$

Or, une intégrale de (5), définie à l'intérieur de Γ, et pour laquelle cette condition est vérifiée, est identiquement nulle. Les limites intérieure et extérieure de v sur la courbe Γ étant nulles, la densité ρ est nécessairement égale à zéro, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite.

BIOLOGIE GÉNÉRALE. — *La parthénogenèse expérimentale par les charges électriques.* Note de M. YVES DELAGE.

Guidé par une idée théorique, que j'indiquerai dans un instant, j'ai fait l'expérience suivante :

J'ai fabriqué de petites cuvettes larges et peu profondes dont le fond était formé d'une mince lame de mica, sur laquelle étaient collés, d'un côté un anneau de verre formant la paroi verticale de la cuvette, de l'autre une feuille d'étain. Si l'on emplit la cuvette d'un liquide électrolytique et qu'on mette ce liquide et la feuille d'étain en communication avec les pôles d'une pile, on réalise un petit condensateur électrique dont l'électrolyte constitue l'armature interne. La charge de la feuille d'étain attire celle de l'électrolyte et la condense au ras de la lame de mica.

Si l'on mélange des œufs au liquide électrolytique, ceux-ci se déposent au fond de la cuvette en une mince couche horizontale, dans la région où la densité électrique est maxima, et sont en quelque sorte dans un bain électrique. D'ailleurs il n'y a pas électrolyse, puisqu'il n'y a pas de courant. Un commutateur permet de changer instantanément le signe de la charge de l'électrolyte.

Si, dans un électrolyte approprié (formé de : solution de NaCl isotonique à l'eau de mer, 40; solution de saccharose isotonique à l'eau de mer, 40; eau de mer, 20), on soumet des œufs vierges de *Paracentrotus* (*Strongylocentrotus*) *lividus* à un bain électrique d'abord positif de 30 minutes, puis négatif de 1 heure 15 minutes dans le condensateur-cuvette ci-dessus décrit, alimenté par une pile fournissant environ 15 volts, et qu'on les reporte ensuite dans l'eau de mer, on obtient des larves nageantes qui, dans le délai normal, se transforment en Pluteus, tout comme celles provenant de la fécondation normale ou des procédés chimiques de parthénogenèse expérimentale. Inutile de dire que des œufs placés pendant le même temps, dans le même véhicule et dans le même appareil, mais sans communication avec la pile, ne fournissent aucune larve.

J'ai été amené à concevoir cette expérience par des considérations théoriques très simples, mais je l'ai tentée sans grande confiance et j'avoue que, lorsque je l'ai vue réussir, mon étonnement n'a pas été moindre que ma satisfaction.

J'ai expliqué dans mes Notes de l'année dernière quelles considérations

théoriques m'avaient conduit à tenter d'obtenir la parthénogenèse expérimentale par l'application successive d'un acide agissant comme coagulant, puis d'un alcali agissant comme liquéfiant de certains des colloïdes ovulaires. Je n'y reviendrai pas (voir *Comptes rendus*, t. CXLV, p. 220, séance du 22 juillet 1907). Les acides et les alcalis, si l'on met à part ceux qui sont toxiques, ayant à peu près tous la même action, il semble naturel d'attribuer leur action commune à ce qu'ils ont de commun, c'est-à-dire à l'ion H ou à l'ion OH et non à l'élément ou au groupe chimique qui complète, avec ces ions, les acides ou les alcalis. Dès lors il était permis de se demander si le résultat n'était pas imputable à la charge + de l'ion H et à la charge — de l'ion OH. De là l'idée de tenter de remplacer l'acide par un bain électrique positif et l'alcali par un bain négatif.

Dans le procédé chimique, l'alcali devant agir après l'acide et plus longtemps que celui-ci, j'ai soumis les œufs à l'action d'une charge d'abord positive, puis négative, celle-ci plus prolongée : ce procédé dicté par la théorie m'a immédiatement réussi et c'est lui que les expériences comparatives ultérieures ont montré le meilleur.

Voici quelques indications sur le détail des expériences.

J'ai opéré entre les limites de 0 à 35 volts environ et j'ai obtenu des blastules de 3 à 30 volts, optimum pour 15 volts environ. Je n'ai pu mesurer la charge, opération délicate réclamant un outillage qui me faisait défaut. La durée d'action des charges compatibles avec l'obtention de larves a varié de 5 minutes pour la charge + et 20 minutes pour la charge — à 45 minutes pour la charge + et 1 heure 45 minutes pour la charge —.

Comme véhicule électrolytique, je n'ai pu employer le mélange optimum que j'avais déterminé l'an dernier (solution isotonique de saccharose, 70; eau de mer, 30), parce qu'en raison de sa densité, les œufs y flottent, au lieu de gagner le fond de la cuvette où la charge est accumulée. J'ai constitué le liquide convenable indiqué plus haut, moins efficace que l'eau de mer fortement sucrée, mais suffisant et compatible avec les nécessités de l'expérience. Les œufs s'y déposent lentement mais complètement, et il est parfaitement stérile, en ce sens que les œufs ne s'y développent jamais spontanément, c'est-à-dire sans addition de réactifs ou sans application de charges électriques. Je n'aurais pu me contenter d'augmenter la proportion d'eau de mer dans le premier liquide, car, à la dose où il eût fallu la porter, l'eau de mer est inhibitrice, d'où la nécessité de la diluer avec la solution isotonique de NaCl.

On trouvera les autres détails relatifs à ces expériences dans le Mémoire *in extenso* qui va paraître incessamment dans les *Notes et Revue* des *Archives de Zoologie expérimentale*. J'ajouterai seulement ici que, l'idée de les entreprendre m'étant venue tard dans la saison, je n'ai pas eu le temps, surtout avec l'outillage rudimentaire et peu maniable dont je disposais, de varier suffisamment les conditions pour obtenir un optimum certain. Il y a là plusieurs variables indépendantes : voltage, signe des charges

et emploi de celles de l'un et l'autre signe, isolément ou successivement et suivant l'un ou l'autre ordre d'alternance, durée d'application de chacune d'elles, composition du véhicule électrolytique, température (très importante), etc., et l'on sait combien leurs combinaisons presque infinies demandent de temps pour être réalisées et comparées. Aussi, suis-je loin d'avoir conduit le procédé électrique au même point de perfection que celui au tanin et à l'ammoniaque.

Le pourcentage des larves développées par rapport aux œufs non influencés ou aux larves arrêtées dans leur développement est resté faible, au plus 1 pour 100. Mais ce 1 pour 100 représente encore une quantité assez grande de larves, environ 80 dans une pipettée prise au hasard dans une cuvette d'élevage où l'on aurait pu en recueillir vingt autres pareilles, tandis que la cuvette témoin ne fournissait pas une larve. En outre, la proportion des œufs ayant commencé à se développer était souvent très considérable, jusqu'à 60 pour 100, et il est permis de penser qu'une amélioration légère du processus expérimental leur aurait permis de poursuivre leur développement jusqu'au bout.

Le procédé est à perfectionner, mais d'ores et déjà il est établi que le bain d'électricité statique permet de déterminer la parthénogenèse expérimentale.

Quelle explication donner à la parthénogenèse électrique?

Comme pour le procédé aux acides ou au tanin, le fait que l'expérience a suivi la théorie vient à l'appui de la théorie qui avait inspiré l'expérience et prévu les résultats; mais, pas plus que pour le procédé aux acides ou au tanin, il n'y a là une preuve complète de la validité de la théorie : cette concordance peut n'être qu'une coïncidence. Assurément on peut concevoir que la charge + précipite, comme les acides ou le tanin, certains colloïdes négatifs de l'œuf et détermine ainsi la formation de la membrane vitelline, et que la charge négative, comme les alcalis, fait disparaître la membrane nucléaire en dissolvant des colloïdes positifs précipités dont cette membrane serait formée. Mais il y a place pour d'autres explications, d'autant plus que celle-ci a contre elle, comme je l'ai déjà fait remarquer, le fait que l'apparition de la membrane vitelline et la disparition de la membrane nucléaire ont lieu, non dans les réactifs acide ou tannique et ammoniacal, ni dans le bain électrique, mais seulement après que l'œuf a été reporté depuis quelque temps (au moins 2 ou 3 heures) dans l'eau de mer naturelle.

Parmi les autres explications possibles de ces phénomènes, une se présente à mon esprit avec des caractères de probabilité qui retiennent mon attention.

La charge électrique doit modifier la tension superficielle au contact entre l'œuf et le liquide qui le baigne; et cette modification peut retentir sur la nature, ou tout au moins sur la vitesse des échanges osmotiques et surtout dialytiques entre l'œuf et le liquide ambiant. Je dis *surtout dialytiques* parce

que l'osmose n'intervient que comme co-phénomène nécessaire de la dialyse, l'utilité de modifications de la teneur en eau me semblant exclue par les innombrables expériences où j'ai montré que la parthénogenèse s'accomplit en milieu isotonique à l'eau de mer et par conséquent à l'œuf.

L'eau de mer pure est absolument inefficace comme agent de parthénogenèse. Cela tient sans doute à ce qu'elle diffère peu ou point des électrolytes qui imbibent les colloïdes constitutifs de l'œuf et qui sont eux-mêmes inhibiteurs de la parthénogenèse, puisque l'œuf (je parle toujours du *Paracentrotus*) n'est pas naturellement parthénogénétique. Pour rendre l'œuf auto-parthénogénétique, il faut peut-être modifier dans un certain sens la composition de ce milieu électrolytique intérieur, enlever certains constituants ou diminuer leur proportion, en introduire d'autres ou augmenter leur quantité relative. Pour cela il faut placer l'œuf dans un milieu différent de l'eau de mer et constitué de telle façon qu'il puisse, par des échanges dialytiques, amener le suc électrolytique intérieur de l'œuf à la composition convenable. Telle est sans doute la raison pour laquelle, dans toutes les expériences de parthénogenèse expérimentale, on emploie de l'eau de mer considérablement modifiée dans sa constitution (1).

Mais cela ne suffit pas. Il faut encore que ces échanges se fassent assez rapidement, car, hors de l'organisme maternel, l'œuf meurt en peu de temps s'il ne rencontre pas les conditions (spermatozoïde ou agents expérimentaux) qui le font se segmenter. Dès lors on peut concevoir que les charges électriques, en modifiant la tension superficielle, accélèrent les échanges dialytiques entre les électrolytes intérieurs de l'œuf et ceux du milieu artificiel ambiant.

Il se pourrait aussi que l'action spécifique du nickel et du sulfite de soude, que j'ai fait connaître il y a deux ans, celle des acides ou du tanin et de l'ammoniaque, et d'autres encore, se ramènent, pour une part au moins, à une influence de cet ordre.

---

(1) J'ai souvenir d'une expérience, dont je ne puis en ce moment retrouver l'origine, où la parthénogenèse aurait été obtenue en eau de mer concentrée. Cette expérience isolée aurait besoin d'être confirmée. Pour ma part je l'ai souvent tentée sans aucun succès.

J'avais employé le sucre à titre de substance inerte pour diluer les électrolytes de l'eau de mer sans changer la pression osmotique totale. Mais je crois aujourd'hui que son rôle est plus actif, spécifique, car dans de nouvelles expériences, faites cette année, toutes les substances par lesquelles j'ai essayé de le remplacer se sont montrées nuisibles ou inefficaces (mannite, urée, glycérine, alcool, glycocolle, acétamide).

Ces agents spécifiques de la parthénogenèse, chimiques ou physiques, seraient alors des catalyseurs d'une sorte particulière, en ce sens qu'ils seraient, par une action sur la tension superficielle, des accélérateurs des échanges dialytiques nécessaires. Ainsi reviendrait sur l'eau, sous une forme nouvelle et plus précise, la théorie des catalyseurs dont Loeb a fait usage pour expliquer la parthénogenèse expérimentale.

L'explication que je viens d'émettre n'est rien moins que certaine et, dans le Mémoire *in extenso*, j'élève moi-même contre elle diverses objections. Il me suffit qu'elle ne soit pas absurde et que sa vérification soit accessible, dans une certaine mesure, à l'expérience. Dès lors il vaut mieux expérimenter que discuter. C'est ce que je compte faire dès que les circonstances me le permettront.

Je profite de l'occasion de cette Note pour dire où en sont mes tentatives d'élevage de larves parthénogénétiques.

Les deux Oursins qui me restaient l'année dernière de mes expériences de l'été précédent et qui mesuraient, la dernière fois que j'en ai parlé (*Comptes rendus*, séance du 9 décembre 1907), l'un $3^{mm},5$ et l'autre 4^{mm}, ont beaucoup grossi : le premier mesure aujourd'hui environ 12^{mm} et le second 18^{mm} de diamètre, sans les piquants. Ils sont l'un et l'autre en parfait état. J'espère qu'ils atteindront l'été prochain la maturité sexuelle.

J'ai refait cette année des tentatives nouvelles d'élevage, mais beaucoup moins assidues que l'année dernière. Les Pluteus en élevage ne m'ont fourni qu'un nouvel Oursin, mais j'ai encore deux larves à terme qui vont peut-être se fixer. Les Brachiolaria d'*Asterias glacialis* m'ont fourni sept fixations, mais encore si jeunes que je dois attendre quelques jours avant de me prononcer à leur égard.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la stabilité relative des groupements polycarbonés cycliques*. Note [1] de M. LOUIS HENRY.

Dans ma Note du 11 mars 1907 [2] je me suis occupé de la déshydratation directe du *diméthylisopropylcarbinol* $(H^3C)^2=\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}-CH=(CH^3)^2$.

C'est au fond la question générale de la différence de stabilité des

(1) Présentée dans la séance du 21 septembre 1908.

(2) *Comptes rendus*, t. CXLIV, p. 552.

systèmes

$$> \underset{\mathrm{OH}}{\underset{|}{C}} - CH < \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} \Big> \underset{\mathrm{OH}}{\underset{|}{C}} -$$

vis-à-vis des agents déshydratants.

Il a été constaté, contrairement à mes prévisions, que l'élimination de l'eau se fait en deux sens, aux dépens du groupement alcool tertiaire $> \underset{\mathrm{OH}}{\underset{|}{C}} -$, avec les groupements voisins $> CH -$ et $CH^3 > -$ pour donner les deux hydrocarbures non saturés, isomères C^6H^{12} :

Le *tétraméthyléthylène*

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} \Big> C = C \Big< \begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} \qquad \text{Éb. : } 72°$$

et le *méthylisopropyléthylène*

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} \Big> CH - \underset{CH^3}{\underset{|}{CH}} = CH^2 \qquad \text{Éb. : } 56°\text{-}58°,$$

dans la proportion approximative des $\frac{3}{4}$ du premier et de $\frac{1}{4}$ du second de ces hydrocarbures, donc une préférence marquée, mais non *exclusive*, pour la déshydratation dans le système le moins carboné $> \underset{\mathrm{OH}}{\underset{|}{C}} - CH <$.

Il était intéressant de savoir comment se comporterait dans les mêmes conditions l'alcool tertiaire correspondant, renfermant le groupement *cyclique* $\begin{matrix} H^2C \\ | \\ H^2C \end{matrix} \Big> CH$, équivalent au groupement *isopropylique* $\begin{matrix} H^3C \\ H^3C \end{matrix} \Big> CH -$ du *diméthylcyclopropylcarbinol :*

$$\begin{matrix} H^2C \\ | \\ H^2C \end{matrix} \Big> CH - \underset{\mathrm{OH}}{\underset{|}{CH}} \Big< \begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} \qquad \text{Éb. : } 124°.$$

C'est la question qu'a résolue avec succès un de mes élèves, M. Pierre Bruylants, au cours de recherches entreprises, à mon invitation, sur les composés cycliques en C^3, de diverses natures, qui se groupent autour du *nitrile éthyléno-acétique* $\begin{matrix} CH^2 \\ | \\ CH^2 \end{matrix} \Big> CH - CN$. Je ne m'occuperai ici des fruc-

tueuses et intéressantes études de M. Bruylants qu'en ce qui concerne la question formulée plus haut.

La conclusion générale qui les résume, quant à celle-ci, c'est la stabilité nettement apparente du système *cyclique* $\begin{matrix} CH^2 \\ | \\ CH^2 \end{matrix}\!\!>\!CH$, par rapport au système *isopropylique* $\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}\!\!>\!CH-$, stabilité qui se reflète même dans la molécule totale du composé alcool tertiaire.

Voici divers faits, constatés pour la plupart par M. Bruylants, qui en sont la preuve :

1° *Action de l'anhydride acétique.* — Alors que ce réactif suffit à transformer le composé isopropylique $\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}\!\!>\!CH-\underset{OH}{C}\!\!<\!\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}$ en ses deux hydrocarbures, complètement, le composé *cyclique* $\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}\!\!>\!\underset{OH}{C}-CH\!<\!\begin{matrix} CH^2 \\ | \\ CH^2 \end{matrix}$ résiste à son action. Contrairement aux alcools tertiaires ordinaires, il en est transformé en son *acétate* :

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}\!\!>\!\underset{OAc}{C}-CH\!<\!\begin{matrix} CH^2 \\ | \\ CH^2 \end{matrix} \qquad \text{Éb. : 159°-160°.}$$

Pour réaliser la déshydratation directe de l'alcool *cyclique* il faut s'adresser à un agent plus énergique, le plus énergique même, à savoir l'anhydride phosphorique P^2O^5.

2° *Action de l'acétate potassique sur les éthers bromhydriques.* — Chauffé dans un appareil à reflux, le bromure d'*isopropylcarbinol* se transforme, comme je l'ai indiqué précédemment, en ses deux hydrocarbures *isomères* C^6H^{12}.

Dans les mêmes conditions, le bromure du *diméthylcyclopropylcarbinol*

$$\begin{matrix} H^3C \\ H^3C \end{matrix}\!\!>\!\underset{Br}{C}-CH\!<\!\begin{matrix} CH^2 \\ | \\ CH^2 \end{matrix} \qquad \text{Éb. : 153°-154°}$$

fournit presque instantanément l'acétate correspondant.

3° *Action de la potasse caustique sur les éthers haloïdes et notamment sur les éthers bromhydriques.* — Cette réaction avait déjà été réalisée, mais d'une manière indirecte, par M. Couturier ([1]), à l'aide du *bromure* de l'alcool *pinacolique*, de

---

([1]) *Contribution à l'étude de la pinacone et de ses dérivés* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXVI, 6e série, 1891, p. 433 et suiv.).

Friedel :

$$(H^3C)^3C - \underset{\displaystyle Br}{CH} - CH^3.$$

On sait, à présent, que les éthers haloïdes de cet alcool s'*isomérisent*, par la chaleur, en se transformant en éthers du *diméthylisopropylcarbinol*

$$(CH^3)^2 - CH - \underset{\displaystyle X}{C} \begin{matrix} \diagup CH^3 \\ \diagdown CH^3 \end{matrix}.$$

Or il résulte des expériences de M. Couturier qu'on obtient, dans ces conditions, un mélange des deux hydrocarbures C^6H^{12}, où abonde, en une proportion très prépondérante, le *tétraméthyléthylène* $(CH^3)^2 - C = C - (CH^3)^2$. Éb. 72°.

Sous l'action de l'ammoniaque aqueuse, il ne se formerait même, selon M. Couturier, que cet hydrocarbure seul.

Au surplus, cette réaction du bromure du diméthylisopropylcarbinol

$$(CH^3)^2 = \underset{\displaystyle Br}{C} - CH(CH^3)^2$$

a été *effectivement* réalisée par M. Bruylants, avec la potasse caustique alcoolique, et elle a fourni un mélange de produits divers où prédomine, aussi et notablement, le tétraméthyléthylène $(CH^3)^2 - C = C - (CH^3)^2$.

Mais les choses se passent tout autrement en ce qui concerne le *bromure du diméthylcycloisopropylcarbinol*

$$\begin{matrix} CH^2 \diagdown \\ CH^2 \diagup \end{matrix} \underset{\displaystyle Br}{C} - CH \begin{matrix} \diagup CH^2 \\ | \\ \diagdown CH^2 \end{matrix}.$$

La réaction, nécessitant d'abord une température plus élevée, s'opère moins facilement.

Chauffé en tube scellé, à 170° pendant 8 heures, avec un excès de potasse caustique pulvérulente et sèche, cet éther bromhydrique se transforme en un hydrocarbure qui, dès la première distillation, selon M. Bruylants, bout fixe à 77°. Il reste une faible quantité d'éther non altérée. Le rendement de cette opération est de 72 pour 100 en hydrocarbure.

Celui-ci répond à la formule C^6H^{10}, et il n'est autre que le composé cyclique correspondant au *diméthylisopropyléthylène*, comme l'exprime la formule

$$\begin{matrix} CH^2 \diagdown \\ | \\ CH^2 \diagup \end{matrix} CH - \underset{\displaystyle CH^3}{C} = CH^2.$$

Le même hydrocarbure se forme sous l'action de l'anhydride phosphorique sur l'alcool lui-même, mais le rendement est moindre.

Je crois inutile de rapporter ici l'action de la potasse caustique alcoolique; cette opération se complique de la formation d'un produit accessoire oxy-éthylé fort intéressant.

Il résulte de là que la réaction qui était accessoire, alors qu'il s'agissait de composés isopropyliques, à savoir l'élimination de H — OH ou de HBr aux dépens du système $-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}\begin{matrix}\diagup CH^3\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$ ou $-\underset{\displaystyle Br}{\underset{|}{C}}\begin{matrix}\diagup CH^3\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$, devient la réaction principale, et *peut-être même exclusive*, alors que, dans le voisinage de ces groupements, se trouve le système *cyclique* $\begin{matrix}H^2C\diagdown\\ |\quad\\ H^2C\diagup\end{matrix}CH$ — qui reste intact.

Le fait mérite évidemment d'être noté, parce qu'il constate, d'une manière remarquable et certaine, la différence d'aptitude réactionnelle des systèmes $\begin{matrix}CH^3\diagdown\\ CH^2\diagup\end{matrix}CH$ et $\begin{matrix}CH^2\diagdown\\ |\quad\\ CH^3\diagup\end{matrix}CH$ — ainsi que leur inégale stabilité.

Je ferai remarquer en terminant que le *méthylisopropyléthylène*

$$\begin{matrix}CH^3\diagdown\\ CH^3\diagup\end{matrix}CH - \underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{C}} = CH^2$$

bout à 56°-58°; l'hydrocarbure cyclique

$$\begin{matrix}H^2C\diagdown\\ |\quad\\ H^2C\diagup\end{matrix}CH - \underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{C}} = CH^2 \qquad \text{Éb.}: 77°,$$

obtenu par M. Bruylants, bout ainsi à 20° plus haut. Ces rapports de volatilité sont tout à fait réguliers.

CORRESPONDANCE.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les systèmes de familles de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées.* Note de M. S. Carrus.

La détermination des systèmes de coordonnées curvilignes, à n variables, tels que les surfaces du système se coupent mutuellement suivant des lignes conjuguées a été ramenée par M. Darboux aux opérations suivantes :

1° La détermination de fonctions β_{ik} satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_j} = \beta_{ij}\beta_{jk}; \tag{1}$$

2° L'intégration des équations déterminant les fonctions H_i, U_k,

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \qquad \beta_{ki} = \frac{1}{U_i}\frac{\partial U_k}{\partial \rho_i}; \tag{2}$$

cette intégration introduit chaque fois (les β_{ik} étant données) n nouvelles fonctions arbitraires d'une variable;

3° L'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$dx = H_1 U_1 d\rho_1 + H_2 U_2 d\rho_2 + \ldots + H_n U_n \partial\rho_n. \tag{3}$$

Si l'on prend n solutions distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspondant à un même système de fonctions H_i, mais à n systèmes distincts de solutions U_i, on obtient le *système conjugué*.

Si, d'autre part, conservant les fonctions β_{ik} et les mêmes n^2 fonctions U_i^k, on prend deux systèmes de coordonnées correspondant à deux systèmes différents de fonctions H_i, ces deux systèmes se correspondent avec plans tangents parallèles.

La détermination des systèmes conjugués que nous avons en vue résulte des remarques suivantes :

Les fonctions β_{ik} étant supposées connues, on peut établir une équation assez simple ne renfermant qu'une seule des fonctions à déterminer H_k ou U_k. On a en effet

$$H_i = \frac{1}{\beta_{ik}}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \qquad H_j = \frac{1}{\beta_{jk}}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_j}, \qquad H_i = \frac{1}{\beta_{ij}}\frac{\partial H_j}{\partial \rho_i}.$$

En éliminant entre ces trois relations H_i, H_j, on obtiendra

$$\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} = \frac{\beta_{ik}}{\beta_{ij}}\frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}}{\beta_{jk}}\right); \tag{4}$$

on obtiendrait de même l'équation

$$\frac{\partial U_k}{\partial \rho_i} = \frac{\beta_{ki}}{\beta_{ji}}\frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{\frac{\partial U_k}{\partial \rho_i}}{\beta_{kj}}\right). \tag{5}$$

On voit la grande analogie qui existe entre les deux systèmes d'équations

déterminant les H et les U, analogie dont nous déduirons plus tard quelques conséquences.

L'équation qui détermine H_k *pourra s'intégrer une fois par rapport à* ρ_i *si le rapport* $\frac{\beta_{ik}}{\beta_{ij}}$ *est indépendant de* ρ_i.

Si cette condition est remplie quels que soient les indices j, k, ..., nous dirons que *l'indice i appartient à la première classe.*

De même *l'équation qui détermine* U_k *pourra s'intégrer une fois par rapport à* ρ_i *si le rapport* $\frac{\beta_{ki}}{\beta_{ji}}$ *est indépendant de* ρ_i.

Si cette condition est remplie quels que soient les indices j, k, ..., nous dirons que *l'indice i appartient à la seconde classe.*

On peut se proposer de rechercher :

1° Les systèmes tels que tous les indices i appartiennent à la première classe;

2° Les systèmes tels que tous les indices i appartiennent à la seconde classe;

3° Les systèmes tels qu'un certain nombre d'indices i, j, k, ... soient de la première classe, tous les autres appartenant à la seconde classe.

Premier problème. — *Tous les indices appartiennent à la première classe.*

Cette condition permet de déterminer complètement, dans le cas de plus de trois variables, les fonctions β_{ik} et le système conjugué correspondant. On en déduit aisément tout d'abord que le rapport $\frac{\beta_{ik}}{\beta_{ij}}$ ne peut dépendre que de ρ_j, ρ_k et qu'on peut poser des relations de la forme

$$H_k \varphi_k^j + H_j \varphi_j^k = \varphi_j^k \varphi_k^j,$$

les fonctions φ_j^k, φ_k^j ne dépendant que de ρ_j, ρ_k.

En appliquant la relation ci-dessus à trois indices i, j, k, on aurait de même

$$H_i \varphi_i^k + H_k \varphi_k^i = \varphi_k^i \varphi_i^k, \qquad H_j \varphi_j^i + H_i \varphi_i^j = \varphi_i^j \varphi_j^i.$$

Si, des trois relations écrites, on pouvait déduire H_i, H_j, H_k, la fonction H_i, par exemple, ne pourrait dépendre que de ρ_i, ρ_j, ρ_k, et par suite, *si n est supérieur à* 3, les indices j, k devenant des indices quelconques, H_i ne dépendrait que de ρ_i. Ce cas est connu et nous l'écartons.

Le déterminant des coefficients de H_i, H_j, H_k doit donc être nul, ce qui donne la relation

$$\varphi_k^i \varphi_i^j \varphi_j^k + \varphi_i^k \varphi_j^i \varphi_k^j = 0;$$

on en déduira alors qu'on peut poser d'une façon générale

$$H_i = i + IA,$$

les $2n$ fonctions d'une variable $i, j, k, \ldots$, I, J, K, ... et la fonction A des n variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ étant jusqu'ici arbitraires.

Exprimons que ces fonctions H_i satisfont aux équations qui rentrent dans le type (Darboux, *Syst. orth.*, p. 165)

$$\frac{\partial^2 H_j}{\partial\rho_k\,\partial\rho_i} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial H_j}{\partial\rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial H_j}{\partial\rho_i} = 0.$$

En substituant à H_i, H_j, H_k leurs valeurs, il viendra

$$(6) \qquad A_{ik} = A_i A_k\left(\frac{K}{k + KA} + \frac{I}{i + IA}\right).$$

La fonction A doit donc satisfaire à un système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles que nous allons intégrer.

Posons $A = \frac{U}{V}$ et voyons si l'on peut satisfaire à l'équation ci-dessus, U, V désignant deux fonctions contenant séparément les variables ρ_i, ρ_k. On verra facilement qu'il suffit de poser

$$\frac{U_i}{V_i} = -\frac{i}{I}, \qquad \frac{U_k}{V_k} = -\frac{k}{K};$$

$A = \frac{U}{V}$ est alors solution générale de l'équation aux dérivées partielles (6). Si nous tenons compte maintenant de toutes les équations analogues à (6), nous pouvons dire que la solution générale de ce système s'obtient en posant

$$A = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n},$$

les fonctions X_k, Y_k étant des fonctions de la seule variable ρ_k assujetties à la seule relation

$$X_k = -\int \frac{k}{K} Y'_k \, d\rho_k.$$

Mais on peut faire disparaître tout signe de quadrature de la solution. Il suffit de substituer les fonctions quelconques X_k aux autres fonctions arbi-

traires k. La valeur générale de H_k s'écrit alors, en changeant légèrement nos notations,

$$(7) \qquad H_k = Z_k\left(-\frac{X'_k}{Y'_k} + \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}\right).$$

Les $3n$ *fonctions* X_i, Y_j, Z_k *sont maintenant complètement arbitraires.* On aura ensuite

$$(8) \qquad \beta_{ik} = -\frac{Z_k}{Z_i}\,\frac{Y'_i}{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}.$$

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur quelques propriétés des surfaces courbes.* Note de M. A. **Demoulin.**

Le théorème de Sophus Lie, que nous avons invoqué dans notre Note du 14 septembre 1908, a été énoncé, sans démonstration, par l'illustre géomètre, en 1882, dans les *Forhandlinger* de Christiania. Nous l'avons établi par deux méthodes différentes que nous allons indiquer rapidement.

Première méthode. — Elle consiste à prouver que les deux systèmes linéaires à trois termes de complexes linéaires qui renferment respectivement les demi-quadriques (Q) et (Q′) sont en involution.

Deuxième méthode. — La surface (Σ) étant définie par les équations

$$X = x + \rho\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad Y = y + \rho\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad Z = z + \rho\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

l'équation différentielle de ses asymptotiques est $d\rho = \frac{k\rho^2}{2}\,d\beta$. On déduit de là l'équation du lieu des tangentes asymptotiques de (Σ) relatives aux différents points de t. Si l'on prend comme axes des X, des Y et des Z les droites t, t' et m, cette équation est

$$(1) \qquad \frac{XY}{\sqrt{EG}} = \frac{Z}{s} + \frac{k}{2s^2}Z^2.$$

$\sqrt{E}$ et $\sqrt{G}$ désignant les longueurs des vecteurs $(x'_\alpha, y'_\alpha, z'_\alpha)$, $(x'_\beta, y'_\beta, z'_\beta)$.

En procédant de même à l'égard de la surface (Σ′), on constate que, rapporté aux mêmes axes, le lieu des tangentes asymptotiques de cette surface relatives aux différents points de t' est également défini par l'équation (1).

Le théorème de Lie est dès lors démontré et l'on obtient, en outre, l'équation de la quadrique de Lie sous une forme remarquablement simple.

Nous avons formé aussi l'équation de la quadrique de Lie en la rapportant au trièdre dont les arêtes sont les tangentes Mx, My aux lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ qui se croisent en M, et la normale Mz en ce point. Dans les formules qui vont suivre, nous conserverons toutes les notations de M. Darboux (*Leçons*, IIe Partie).

L'équation générale des quadriques qui renferment les tangentes t et t' est

$$(2) \qquad x^2 \sin^2\omega - y^2 \cos^2\omega + az^2 + 2bxz + 2cyz + 2dz = 0.$$

Si l'on pose

$$b = \frac{1}{4(R - R')} \frac{\partial RR'}{A\,\partial u}, \qquad c = \frac{1}{4(R - R')} \frac{\partial RR'}{C\,\partial v}, \qquad d = \frac{RR'}{R - R'},$$

et qu'on laisse a arbitraire, l'équation (2) définit une infinité simple de quadriques qui se raccordent aux surfaces (Σ) et (Σ') suivant les génératrices t et t'. Leurs centres sont distribués sur la droite

$$-\frac{x \sin^2\omega}{b} = \frac{y \cos^2\omega}{c} = z.$$

Parmi ces quadriques se trouve la quadrique de Lie; elle correspond à la valeur suivante de a (1) :

$$a = \frac{b^2}{\sin^2\omega} - \frac{c^2}{\cos^2\omega} - \frac{RR'}{2(R - R')} \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \left(\frac{b^2}{\sin^2\omega} + \frac{c^2}{\cos^2\omega} + 1 \right) + \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial}{A\,\partial u} \left(\frac{b}{\sin\omega} \right) - \frac{1}{\cos\omega} \frac{\partial}{C\,\partial v} \left(\frac{c}{\cos\omega} \right) \right].$$

Si l'on applique au théorème de Lie la transformation de Lie, qui change

---

(1) Des valeurs de b et de c, on déduit ces théorèmes :

Pour que le centre de la quadrique de Lie relative à un point quelconque M *d'une surface soit situé dans un plan principal, le plan* xMz, *par exemple, il faut et il suffit que les lignes d'égale courbure totale soient les lignes* $u = \text{const.}$; *alors la quadrique est symétrique par rapport au plan* xMz.

Pour que la quadrique de Lie relative à un point quelconque M *d'une surface admette ce point comme sommet, il faut et il suffit que la courbure totale de cette surface soit constante; alors la quadrique est symétrique par rapport aux plans* xMz, yMz.

les droites en sphères, on obtient de nouvelles propriétés des surfaces; nous allons les exposer ainsi que d'autres qui ne résultent pas dudit théorème.

Soient, en un point M d'une surface (M) rapportée au réseau (u, v) de ses lignes de courbure, C et C' les centres de courbure principaux, C correspondant à la ligne de courbure (M_v) et C' à la ligne de courbure (M_u) [1]. Si M décrit (M_v), C' décrit une courbe (C'_v) dont la tangente coupe la tangente à (M_v) au centre de courbure géodésique G' de (M_u). Si M décrit (M_u), C décrit une courbe (C_u) dont la tangente rencontre la tangente à (M_u) au centre de courbure géodésique G de (M_v). Soient ω et ω' les plans osculateurs des courbes (C_u) et (C'_v) aux points C et C', et d leur droite d'intersection. *Ces plans sont rectangulaires et les tangentes en G et G' aux courbes (G_u) et (G'_v) sont respectivement situées dans les plans ω et ω' et perpendiculaires aux plans ω' et ω.* Il existe, dans le plan ω, une conique (Γ) symétrique par rapport à d, passant par le point C et admettant, en ce point, même centre de courbure que (C_u), et, dans le plan ω', une conique (Γ') symétrique par rapport à d, passant par le point C' et admettant, en ce point, même centre de courbure que (C'_v). *Les coniques (Γ) et (Γ') sont focales l'une de l'autre.*

Ces propriétés appartiennent à toutes les surfaces, sauf aux suivantes, pour lesquelles les plans ω et ω' sont indéterminés ou confondus : 1° les surfaces de Monge, dont les lignes de courbure d'un système sont des géodésiques; 2° les surfaces développables; 3° les sphères et les plans; 4° les surfaces réglées à génératrices rectilignes isotropes. Toutefois, pour les surfaces de Monge, on peut énoncer ce théorème, limite du précédent : *Si les lignes (M_u) sont des géodésiques, la ligne (C_u) est une droite (Γ) qui coïncide avec l'axe du cercle osculateur (Γ') de la ligne (C'_v).*

Dans le cas général, il existe une cyclide de Dupin dont les normales s'appuient sur (Γ) et (Γ') et qui touche en M la surface (M) [2]. *Les droites par lesquelles passent les plans de ses lignes de courbure sont les tangentes en G et G' aux lignes (G_u) et (G'_v). Cette cyclide est conservée dans l'inversion.*

Une congruence quelconque étant donnée, il est clair qu'en général on peut attacher à toute droite a de cette congruence deux coniques (Γ) et (Γ')

---

(1) D'une manière générale, si les coordonnées d'un point P sont fonctions de deux paramètres u et v, nous désignons par (P_u) et (P_v) les courbes de paramètres u et v décrites par ce point.

(2) Dans le cas des surfaces de Monge, les coniques (Γ) et (Γ') se réduisent à la droite (Γ) et au cercle (Γ'), et la cyclide se réduit à un tore de révolution.

définies comme ci-dessus. *Supposons que ces coniques existent.* On a vu que si la congruence est normale (c'est-à-dire formée des normales à une surface) les coniques (Γ) et (Γ') sont focales l'une de l'autre. *Réciproquement, si ces coniques* (Γ) *et* (Γ') *sont focales l'une de l'autre, la congruence est normale.* Soient, en effet, π un quelconque des plans perpendiculaires à la droite a et P le point où il rencontre cette droite. Les projections orthogonales des coniques (Γ) et (Γ') sur le plan π se coupent orthogonalement en P; or elles touchent, en ce point, les plans focaux de la droite a; ceux-ci sont donc rectangulaires et la congruence considérée est normale.

GÉODÉSIE. — *Sixième campagne géodésique dans les hautes régions des Alpes françaises.* Note de M. **Paul Helbronner**, présentée par M. Michel Lévy.

Notre chaîne géodésique de précision dans les Alpes de Savoie avait été exécutée, pour la plus grande part, l'année dernière, pendant laquelle nous avions occupé vingt-six des stations prévues. Le programme de la campagne 1908 comportait donc, en premier lieu, la fin de cette chaîne de précision.

Parti à la fin de juin, nous avons stationné en conséquence : le *Mont Bellachat* (2488^{m} E. M.; 30 juin, 1er juillet); le *Cheval Noir* (2834^{m} E. M.; 3-4 juillet); le *Grand Perron des Encombres* (2828^{m} E. M.; 5-8 juillet); le *Mont Brequin* (3194^{m} E. M.; 9 juillet); le *Goléon* (3429^{m} E. M.; 12-22 juillet); le *Thabor* (3181^{m} E. M.; 25-26 juillet).

Ces stations ont été effectuées identiquement à celles de 1907 avec un des grands théodolites réitérateurs de Brunner, du Service géographique de l'Armée; il y fut fait vingt réitérations à quatre lectures.

Les bonnes conditions atmosphériques furent des plus difficiles à obtenir et nous avons subi, pendant cette première période, plus de quinze orages; l'un d'entre eux, notamment dans la nuit du 12 au 13 juillet, à 8^{m} sous le sommet de l'Aiguille du Goléon, nous mit dans une situation critique; plusieurs décharges électriques secondaires frappèrent la tente, qui ne résista au vent tourbillonnaire que grâce aux 50^{cm} de neige fraîche qui la recouvraient. Quoi qu'il en soit, cette chaîne de précision de Savoie s'est exécutée jusqu'au bout, suivant le programme exposé dans notre Communication du 7 octobre 1907, sauf au sommet du Trélod (1er septembre) où il a été fait simplement une station de rattachement entre l'ancien signal démoli et le nouveau signal que nous y avions fait construire. En effet, les liaisons de notre chaîne avec le réseau suisse avaient été reconnues suffisantes par les sommets des Cornettes de Bise, des Voirons, de la Dent d'Oche, de la Dole et du Mont Tendre.

Cette chaîne, qui s'étend sur environ 150^{km} du Nord au Sud et sur une moyenne de 30^{km} de l'Est à l'Ouest, comprend donc, en résumé, 32 stations occupées et 6 points intersectés. Les directions émanées de ces stations sont au nombre de 250. Elles forment des polygones à diagonales très nombreuses dont nous nous proposons d'exécuter prochainement les compensations algébriques.

Ces directions se répartissent ainsi :

3 stations à 12 directions; 1 à 11; 3 à 10; 4 à 9; 9 à 8; 3 à 7; 2 à 6; 5 à 5; 1 à 4; 1 à 3.

La deuxième partie de la campagne (31 juillet au 3 septembre) fut consacrée à la préparation des triangulations de détail de la Haute-Maurienne, par un réseau de stations primaires étudié à l'avance. Les visées furent faites avec le théodolite qui nous servit dans nos quatre premières campagnes de triangulations complémentaires (1903-1906) et furent réitérées également vingt fois.

Les sommets occupés ont été la *Pointe de la Sana* (3450^{m} E. M.); le *Grand Roc Noir* (environ 3540^{m}, porté à tort sur la Carte de l'État-Major comme inférieure à la Pointe du Vallonet); la *Pointe de Ronce* (3620^{m} E. M. italien; non cotée sur l'État-Major français qui ne cote que le signal du Grand Mont-Cenis, contrefort ouest de ce sommet); la *Pointe de Charbonel* (3760^{m} E. M.); la *Pointe de l'Albaron* (3660^{m}, appelée à tort Pointe de Chalanson sur l'État-Major); la *Pointe de Méan-Martin* (3326^{m} E. M.); la *Levanne occidentale* (3607^{m} E. M.); le *Signal du Mont Iseran* (324^{m} E. M.).

En ces 8 stations, une fois terminés, les 20 tours d'horizon sur les signaux de notre réseau primaire, nous avons exécuté une grande quantité de visées secondaires sur les nombreux signaux construits dans cette région, soit pour le cadastre, soit pour les levés du Service géographique de l'Armée, soit enfin pour les études glaciaires de M. Girardin; commençant ainsi les triangulations complémentaires de détail que nous nous proposons d'effectuer en Savoie dans les campagnes prochaines. Indépendamment des visées issues des 8 stations primaires, nous avons, dans ce but, occupé une dizaine de stations secondaires, principalement dans la région de Bonneval.

Comme à l'ordinaire, tant dans nos stations de la grande chaîne de précision de Savoie que dans nos stations du réseau de la Haute-Maurienne, nous avons exécuté, sur toutes nos stations, des tours d'horizon photographiques complets; le nombre des clichés pris dans cette campagne s'élève à 46 douzaines et comprend un certain nombre de téléphotographies.

PHYSIQUE. — *Sur l'interrupteur de Wehnelt.* Note de M. **Paul Bary**, transmise par M. d'Arsonval.

Quoique la découverte de Wehnelt remonte à 1899, il n'a pas encore été fourni de théorie complète du phénomène utilisé dans cet appareil. Il est bien certain aujourd'hui que l'électrolyse n'y joue qu'un rôle tout à fait secondaire, puisque la disposition employée par Simon, de l'étranglement du courant par un petit orifice, reporte l'action en dehors des électrodes, et que l'appareil de Caldwell fonctionne aussi bien avec le mercure comme conducteur qu'avec une solution électrolytique; l'étude des gaz dégagés à l'anode a d'ailleurs montré que leur composition n'était pas celle due à l'électrolyse. (J. Humphreys, Armagnat.)

M. Th. Simon a cherché à attribuer le phénomène à l'effet Joule produit au passage du courant, du fil de platine au liquide, et M. E. Klüpathy, à l'effet Peltier; parmi les différentes objections faites à ces théories, on peut remarquer que ni l'une ni l'autre n'explique le fonctionnement de l'interrupteur Caldwell dans le mercure.

L'étude des phénomènes de striction électromagnétique, que je poursuis depuis plusieurs années, m'a conduit, en ce qui concerne le phénomène de Wehnelt, à une explication que je crois satisfaisante, et qui, en tous cas, permet de prédéterminer l'influence des différentes variables : force électromotrice, résistance, self-induction, pression et température.

J'ai décrit (*Éclairage électrique,* 13 avril 1907) les mouvements qui se produisent au passage d'un courant de grande densité dans un conducteur liquide, mouvements dus à la pression que crée, au centre du conducteur, le passage même du courant; j'ai établi que cette pression P était donnée par la relation

$$P = \frac{4I^2}{\pi d^2},$$

en appelant I l'intensité du courant et d le diamètre du conducteur supposé cylindrique. Dans un interrupteur à orifice, genre Simon, d sera le diamètre de l'orifice.

On conçoit que, lorsque l'intensité I du courant s'établit dans l'orifice, la pression, rapidement croissante, en refoule le liquide avec une vitesse trop grande pour qu'il soit instantanément remplacé par d'autre; il se forme alors une chambre de vapeurs et il y a interruption du courant avec étincelle; dès que le courant est nul, la chambre de vapeurs disparaît, et le cou-

rant se rétablit et augmente jusqu'à ce qu'il ait atteint la valeur I qui produit à nouveau la rupture.

En appelant H la pression extérieure sur le liquide au niveau de l'orifice et P sa tension de vapeur à la température de l'expérience, on peut poser, pour la valeur du courant I qui produira l'interruption,

$$I = \frac{\pi d^2}{4a}(H - P),$$

a étant une constante propre à l'appareil.

Or, le temps nécessaire pour que le courant I atteigne sa valeur est donné par la formule connue

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

De ces deux relations on peut déduire la valeur de la fréquence N de l'interrupteur, en supposant nul le temps pendant lequel se produit et dure la rupture. On a alors

$$N = \frac{R}{L}\,\frac{1}{\mathcal{L}\left[\dfrac{E}{E - AR(H - P)}\right]},$$

où R, L, E sont respectivement la résistance, le coefficient de self-induction et la force électromotrice du circuit, et A un coefficient.

En fait, le temps de rupture, supposé nul et que les courbes de Wehnelt et Donath montrent très petit, n'est réellement négligeable que pour les faibles valeurs de N; dans les autres cas, il y a lieu d'ajouter au temps t (période d'établissement) un temps t' (période de déplacement du liquide) qui est constant pour un appareil donné, à une température fixe.

Cette théorie, appliquée aux résultats d'expériences que j'ai publiés précédemment (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, 1889, p. 925), rend compte de toutes les observations faites. Elle explique également la conclusion si juste, tirée par M. Blondel de ses expériences, d'après laquelle le fonctionnement de l'interrupteur peut être comparé à un bélier hydraulique ou à un pulsomètre.

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Effets de l'*Oïdium quercinum *sur différentes espèces de Chênes.* Note de M. **Ed. Bureau.**

La maladie qui sévit actuellement sur les Chênes, et qui est causée par l'*Oïdium quercinum*, a pris des développements inquiétants pour l'avenir de

nos forêts. Dans l'été de 1907, on l'a remarquée seulement sur les repousses de quelques taillis qui avaient été abattus à la fin de l'hiver. Cette année, ce ne sont pas les jeunes pousses seulement, mais les arbres de tout âge, même centenaires et plus, qui sont atteints. Dans le nord du département de la Loire-Inférieure, où je me trouve en ce moment, les futaies ont pris une teinte grise qui leur donne un aspect étrange. Si l'on y entre par un beau jour, on n'y trouve pas la fraîcheur habituelle; le soleil y pénètre à travers le feuillage recroquevillé et la chaleur y a quelque chose d'étouffant. On pense involontairement à ces forêts d'*Eucalyptus* australiens, qui ne donnent pas d'ombre et que le soleil transperce en raison de la position verticale du limbe des feuilles.

L'étude de l'*Oïdium quercinum* a été faite par de très distingués cryptogamistes, mais il m'a semblé qu'un côté de cette étude relevait plus particulièrement de la Phanérogamie et qu'il y avait lieu de chercher la réponse aux questions suivantes : L'*Oïdium quercinum* attaque-t-il toutes les espèces de Chênes? Les espèces atteintes le sont-elles au même degré et de la même manière? Le parasite peut-il se fixer sur d'autres arbres que les Chênes? Et, dans ce cas, les affinités naturelles des arbres entre eux paraissent-elles être en rapport avec l'aptitude de ceux-ci à être affectés?

Me trouvant dans un pays forestier et au voisinage de propriétés où ont été introduites, il y a plus ou moins longtemps, des essences exotiques, il m'a semblé que je pourrais faire quelques observations utiles à la solution de ces questions.

Un des Chênes les plus remarquables de l'Ouest est le *Chêne doux* (*Quercus Tozza* Bosc), dont l'aire de dispersion s'étend du Nord au Sud depuis l'Ille-et-Vilaine jusqu'au Maroc, sur une très faible largeur E.-O. Il est atteint par l'*Oïdium*, ainsi que l'a indiqué M. Gadeceau dans l'*Express de l'Ouest* (13 septembre 1908). Je puis ajouter que c'est l'espèce la plus malade de toutes. Comme dans les autres, les nouvelles pousses sont particulièrement atteintes; mais, en outre, toutes les feuilles de l'arbre le sont plus ou moins. Malgré le nombre considérable d'individus que j'ai examinés attentivement, je n'ai pu en trouver un seul qui fût exempt du parasite. Si l'espèce ne résiste pas à cette rude attaque, ce ne sera pas un grand malheur au point de vue forestier, car le bois en est tortueux et d'une croissance lente; mais, au point de vue botanique, ce sera regrettable, car le *Q. Tozza* est intéressant, non seulement par sa répartition géographique, mais par son affinité avec les Chênes de l'époque pliocène.

Presque aussi malade que le *Quercus Tozza* est le *Quercus pedunculata* Ehrh., le plus répandu de nos Chênes. C'est lui qui, par ses feuilles déformées et devenues grises ou blanchâtres, donne aux forêts une teinte anormale. C'est dans cette espèce qu'on peut le mieux observer, sur les jeunes pousses, la déformation du bois par le

fait de l'*Oïdium*. La pousse d'un an, ayant été atteinte en 1907, a perdu son bourgeon terminal qui tombe ou reste avorté; mais les bourgeons axillaires situés immédiatement au-dessous, qui, en raison de l'état maladif du rameau, ne sont séparés que par de très courts entre-nœuds, se sont développés en rameaux secondaires, qui semblent naître presque du même point et sont disposés en une pseudo-ombelle. Ces rameaux latéraux eux-mêmes, longs et grêles, ont leurs feuilles atteintes successivement par la maladie. Ces feuilles tombent prématurément et le rameau latéral, dénudé, se termine par un petit bouquet de feuilles très tendres, très rapprochées, et un bourgeon terminal qui avorte. Souvent, à la sève d'août, les bourgeons latéraux situés aux aisselles des feuilles récentes se développent en ramules et forment une nouvelle pseudo-ombelle. La tige principale est donc remplacée, à plusieurs reprises, par des rameaux latéraux multiples, l'écorçage devient impossible, et il serait difficile d'utiliser par la suite ce bois tortueux comme bois d'œuvre.

Les pieds de *Quercus pedunculata* ayant toutes leurs feuilles malades sont nombreux; mais on voit parfois des arbres restés indemnes au milieu d'autres très fortement attaqués. J'en ai vu en plusieurs endroits et, en particulier, dans une vieille avenue dont tous les arbres sont de même âge, de même forme et plantés dans le même terrain. La cause de ce curieux contraste nous échappe.

C'est encore sur le *Quercus pedunculata* qu'on peut le mieux observer ce fait généralement remarqué, que le pourtour du bois est beaucoup plus atteint que la partie centrale. Il semble que les arbres de la périphérie aient en quelque sorte tamisé l'air et retenu les germes du champignon parasite.

Le *Quercus Cerris* L., rare à l'état spontané, mais qu'on propage maintenant dans les parcs et les jardins, est un grand arbre, qui m'a paru attaqué avec la même intensité que le *Quercus pedunculata*, sauf, cependant, que les individus indemnes sont plus nombreux.

Le *Quercus sessiliflora* L., vulg. *La Drouille*, abondant dans la région où je me trouve, se comporte autrement que ceux qui précèdent. Le plus souvent l'arbre a conservé son aspect : les vieilles feuilles ne sont pas atteintes, seules les pousses de printemps ont des feuilles couvertes d'*Oïdium*, qui tombent l'une après l'autre, de bas en haut, et parfois, vers le sommet de ces pousses, un ou deux rameaux plus jeunes, résultant de la sève d'août, et représentant, à sa plus simple expression, une de ces pseudo-ombelles fréquentes sur les jeunes pousses de printemps du *Quercus pedunculata*.

Les deux espèces dont je viens de parler : *Quercus pedunculata* et *Quercus sessiliflora*, ont un port bien différent. Tandis que le *Quercus pedunculata*, en raison de l'absence de pétiole de ses feuilles, les a tournées dans tous les sens et formant en quelque sorte des bouquets, le *Quercus sessiliflora* a des feuilles plus ou moins longuement pétiolées, et dont le limbe s'étend horizontalement, la face supérieure vers la lumière, l'inférieure vers le sol. Les feuilles s'étalent ainsi parallèlement, et la physionomie de ces deux arbres est tellement différente qu'on peut les reconnaître de loin.

Or il est curieux de voir qu'un Chêne de l'Amérique du Nord (*Quercus rubra*), qui a à peu près le même port que le *Quercus sessiliflora*, c'est-à-dire dont les feuilles sont longuement pétiolées et étalées, se comporte absolument de même au point de vue de la résistance à la maladie : son aspect n'est pas modifié, les vieilles feuilles ne

portent pas de traces de champignon ; seuls les jeunes rameaux ont leurs feuilles atteintes et les perdent l'une après l'autre.

Le *Quercus palustris,* aussi de l'Amérique septentrionale, est plus résistant encore et n'offre que rarement des jeunes pousses dénudées.

Ceci ne s'accorde guère avec l'opinion qui regarde l'*Oïdium quercinum* comme étant d'origine américaine et attaquant de préférence les Chênes qui proviennent du nouveau monde.

Cela ne s'accorde guère non plus avec l'idée que les *Quercus pedunculata* et *sessiliflora* ne seraient que deux formes d'une même espèce, *Quercus Robur* de Linné. Leur résistance si différente à la maladie indiquerait, semble-t-il, des affinités naturelles moins étroites.

Je ne puis rien dire du *Quercus pubescens* Willd., que je n'ai pu observer sous le rapport de son plus ou moins d'aptitude à recevoir l'*Oïdium.* Il forme le bois de la Blanche, à Noirmoutiers, et je puis signaler ici sa présence, assez inattendue, au bois de Boulogne. Il sera donc facile d'être renseigné à son égard.

Quant aux Chênes à feuilles persistantes, qui ont tant de ressemblance entre eux, et qu'on penserait, au premier abord, avoir le même degré de résistance, j'en ai observé deux espèces, toutes deux à l'état de culture, mais représentées par un certain nombre d'individus : le *Quercus Suber* L. et le *Quercus Ilex* L. Ce dernier se comporte absolument comme les *Quercus rubra* et *palustris,* c'est-à-dire qu'il a seulement les jeunes rameaux malades. Quant au *Quercus Suber,* malgré son affinité avec le *Quercus Ilex,* il est resté indemne. La différence est d'autant plus frappante que plusieurs des individus ont été plantés le même jour et dans la même situation.

L'*Oïdium quercinum* ne s'attaque pas seulement aux Chênes; il atteint encore le Hêtre (*Fagus sylvatica* L.), mais seulement quand cette espèce est cultivée en taillis. Les jeunes pousses seules ont alors leurs feuilles desséchées et caduques. Le Hêtre est d'ailleurs un des genres les plus voisins du Chêne.

Le Châtaignier, qui en est plus voisin encore, puisque certains botanistes l'ont compris dans le genre *Quercus,* est absolument réfractaire au parasite dont nous nous occupons.

On peut résumer ainsi le degré de résistance à l'*Oïdium* des différents arbres que nous venons de citer :

Feuilles réfractaires à la maladie...	*Castanea vulgaris* Lam. *Quercus Suber* L.
Feuilles des jeunes pousses seules attaquées......................	*Q. Ilex* L. *Q. sessiliflora* Smith. *Q. rubra.* *Q. palustris.* *Fagus sylvatica* L.
Toutes les feuilles attaquées.......	*Quercus Cerris* L. *Q. pedunculata* Ehrh. *Q. Tozza* Bosc.

SISMOLOGIE. — *Sur un séismographe à enregistrement galvanométrique à distance.* Note de M. **B. Galitzine**, présentée par M. Bigourdan.

Pour l'étude des ébranlements de la surface terrestre, occasionnés par des tremblements de terre éloignés ou voisins, on se sert, dans la grande majorité des cas, de pendules horizontaux; et actuellement on se borne à étudier seulement les mouvements oscillatoires, réguliers, du sol, caractérisés par une certaine période T_p et une amplitude x_m.

Soit x l'élongation d'un point de la surface du sol par rapport à sa position d'équilibre dans un azimut quelconque; on peut alors poser

$$x = x_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_p} + \delta\right). \tag{1}$$

Un pendule horizontal enregistreur, convenablement placé, accusera ce mouvement par une courbe, qui répond à l'équation différentielle suivante :

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0, \tag{2}$$

où θ est l'angle de déviation du pendule, l la distance du centre d'oscillation à l'axe de rotation, n une constante, qui dépend de la période propre T du pendule sans amortissement $\left(n = \frac{2\pi}{T}\right)$, et ε une autre constante, qui dépend de l'amortissement de l'appareil.

Or, quoique le mouvement du sol ait été supposé excessivement simple, le pendule horizontal décrira une courbe beaucoup plus compliquée, ce qui provient de l'influence du mouvement propre de l'appareil. Pour éliminer autant que possible cette influence perturbatrice, qui nuit excessivement à la lecture des séismogrammes, il faut augmenter autant que possible l'amortissement du pendule, en poussant même jusqu'à l'apériodicité ($\varepsilon \geqq n$).

Dans ce cas, on obtient des séismogrammes qui correspondent tout à fait aux mouvements du sol, fait qui a été vérifié expérimentalement à l'aide d'une plate-forme mobile [1]. J'obtiens ce fort amortissement au moyen d'une plaque en cuivre fixée au bras du pendule, et qui se meut entre les pôles

---

[1] Voir *Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen* et *Ueber die Methoden zur Beobachtung von Neigungswellen* (*Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente de Saint-Pétersbourg*, t. I, Livr. 3, et t. II, Livr. 2).

opposés de deux petits aimants permanents en fer à cheval ([1]). Cet amortisseur est très simple et très commode; il peut être appliqué à toutes sortes de séismographes et, en réglant la distance des pôles des aimants, on peut varier à volonté la grandeur de l'amortissement. Il possède encore l'avantage de laisser un espace libre assez grand entre la plaque de cuivre et les pôles des aimants, de sorte qu'il n'exige pas le réglage délicat des amortisseurs à air; en outre, cet amortissement magnétique est véritablement proportionnel à la vitesse angulaire du pendule, en accord avec l'équation différentielle (2).

Le seul désavantage d'un fort amortissement c'est qu'il diminue la sensibilité du pendule. Je remédie à cet inconvénient en employant la méthode d'enregistrement galvanométrique, ce qui permet de convertir un pendule horizontal, même apériodique, en un appareil d'une très haute sensibilité et sans avoir recours aux leviers, qui, dans la pratique, sont très incommodes et introduisent de nouveaux éléments d'erreur.

A cet effet j'emploie quatre petites bobines d'induction, convenablement reliées entre elles et placées entre deux plaques de mica, le tout fixé au bras du pendule. Deux autres petits aimants permanents forment le champ magnétique dans lequel les bobines se déplacent quand le pendule est en mouvement. Ces bobines sont reliées à un galvanomètre apériodique très sensible du type d'Arsonval. En réglant convenablement la résistance extérieure, je mets ce galvanomètre exactement à la limite de l'apériodicité ([2]). Or chaque petit mouvement du pendule donne naissance, dans les bobines, à un courant induit qui est immédiatement accusé par le galvanomètre; le mouvement de celui-ci est enregistré par la méthode optique sur du papier photographique, enveloppant un cylindre tournant. Cette méthode est excessivement sensible et, dans la pratique, très simple.

Soient φ la déviation angulaire du galvanomètre, T_1 sa période propre sans amortissement, $n_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, et k un facteur qui dépend des éléments de construction du pendule et du galvanomètre ([3]); alors φ doit satisfaire à l'équation différentielle suivante :

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0. \tag{3}$$

([1]) Voir *Ueber die magnetische Dämpfung von Horizontalpendeln* (*Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, n° 8, 1908).

([2]) Voir *Die electromagnetische Registriermethode* (*Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, Saint-Pétersbourg*, t. III, Livr. 1).

([3]) La détermination expérimentale de k n'offre aucune difficulté. Consulter à ce sujet la Note précédente et aussi : *Ueber die Bestimmung der Constanten von stark gedämpften Horizontalpendeln* (*Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, n° 9, 1908).

Il est aisé de voir, en intégrant cette équation (3) et en ayant égard aux équations (1) et (2), que le point lumineux décrira sur le papier photographique une sinusoïde, correspondant exactement aux mouvements du sol et avec la même période. Si l'amortissement est grand, les termes dépendant des conditions initiales du mouvement ne se font nullement sentir : après un temps très court, ils deviennent en pratique complètement négligeables.

Soient, sur le papier photographique, y_m l'élongation linéaire maximum du point lumineux correspondant à l'amplitude x_m, et A_1 la distance de la surface du cylindre enregistreur au miroir du galvanomètre. Si le pendule est lui-même à la limite de l'apériodicité ($\varepsilon = n$), on trouve pour y_m l'expression très simple suivante :

$$(4) \qquad y_m = \frac{kA_1}{\pi l} \frac{T_p}{\left[1+\left(\frac{T_p}{T}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{T_p}{T_1}\right)^2\right]} x_m.$$

Le multiplicateur de x_m, dans la formule précédente, caractérise l'agrandissement de l'appareil pour une valeur donnée de T_p. La valeur de ce facteur peut aisément, pour les périodes qu'on rencontre d'ordinaire en séismométrie, dépasser 1000, ce qui démontre clairement la grande sensibilité de ce séismographe. Outre cette grande sensibilité, qui du reste peut être facilement réglée à volonté, la méthode d'enregistrement galvanométrique offre encore le grand avantage de pouvoir inscrire les mouvements du pendule à distance, ce qui permet d'isoler complètement les séismographes dans une enceinte fermée et même dans le vide.

J'ai mis cette méthode à l'étude, non seulement dans mon laboratoire de Physique, au moyen de mouvements artificiels, mais aussi à la Station sismique de l'Observatoire astronomique de Pulkowa, et j'ai toujours obtenu des résultats extrêmement satisfaisants ([1]). L'hiver et le printemps derniers j'ai appliqué cette méthode, pendant plusieurs mois consécutifs, à trois pendules horizontaux de systèmes différents, savoir : un pendule type Zöllner, un pendule type Rebeur-Paschwitz et un pendule du type que je viens d'étudier, construit d'après mes indications ([2]); avec ces trois pendules d'une

---

([1]) Voir à ce sujet *Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen* (*loc. cit.*) et *Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa* (*Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, Saint-Pétersbourg*, t. III, Livr. 1).

([2]) Voir *Ueber eine Abänderung des Zöllner'schen Horizontalpendels* (*Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, Saint-Pétersbourg*, t. III, Livr. 3).

inégale sensibilité, j'ai obtenu des séismogrammes dont la marche était absolument identique, même dans les moindres détails; en outre, les valeurs de x_m, déduites de ces trois espèces de séismogrammes [voir la formule (4)], accusaient un accord très satisfaisant, car les divergences entre ces valeurs n'atteignaient que quelques centièmes.

M. **Louis Maillard** adresse une Note *Sur la loi de Newton et les hypothèses cosmogoniques.*

(Renvoi à l'examen de M. H. Poincaré.)

M. **Jules Charvot** adresse une Note *Sur la destruction du phylloxera.*

(Renvoi à l'examen de M. Prillieux.)

M. **Ch. Nicolas** adresse une Note intitulée : *Observation d'un phénomène consistant en productions d'électricité lumineuses et continues pendant une heure et demie, au cours d'un orage.*

(Renvoi à l'examen de M. Violle.)

La séance est levée à 4 heures.

G. D.